

**Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение
высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

УТВЕРЖДАЮ

**Проректор по учебной
и методической работе**

_____ **Е.А. Каменева**

28.12.2023 г.

Л. А. Мейханаджян

Финансовая математика и ее приложения

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки:

01.03.02 – Прикладная математика и информатика,

ОП «Прикладное машинное обучение»

*Рекомендовано Ученым советом
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
(протокол № 39 от 20.12.2023 г.)*

*Одобрено Советом учебно-научного
Департамента анализа данных и машинного обучения
(протокол № 10 от 14.12.2023 г.)*

Москва 2023

Содержание

1. Наименование дисциплины	2
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	2
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	2
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся.....	3
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий.....	3
5.1. Содержание дисциплины.....	3
5.2. Учебно-тематический план.....	6
5.3. Содержание семинаров, практических занятий.....	7
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	10
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы.....	10
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	11
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....	17
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	22
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	23
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.	24
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем.....	26
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	27

1. Наименование дисциплины

«Финансовая математика и ее приложения»

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
УК-12	Способность использовать базовые дефектологические знания в социальной и профессиональной сферах	1. Находит пути взаимодействия в социальной и профессиональной сферах с лицами с ограниченными возможностями здоровья и инвалидами.	Знать особенности применения базовых дефектологических знаний в социальной и профессиональной сферах; принципы взаимодействия при коммуникации в различных сферах жизнедеятельности, с учетом социально-психологических особенностей лиц с ограниченными возможностями здоровья; алгоритмы решения профессиональной задачи в социальной сфере и профессиональной сфере Уметь планировать профессиональную деятельность с лицами, имеющими инвалидность или ограниченные возможности здоровья; использовать инструментальный базовых дефектологических знаний для решения профессиональных задач

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

«Финансовая математика и ее приложения» относится к Циклу математики и информатики по направлению подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика, ОП «Прикладное машинное обучение».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 3 (в часах)
Общая трудоемкость дисциплины	4 з/е, 144 ч.	144
<i>Контактная работа - Аудиторные занятия</i>	50	50
<i>Лекции</i>	16	16
<i>Семинары, практические занятия</i>	34	34
<i>Самостоятельная работа</i>	94	94
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен	Экзамен

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1 Содержание дисциплины

Раздел 1. Основы классической финансовой математики

1.1. Простые и сложные проценты. Типы процентных ставок. Эффективная процентная ставка. Понятие дисконта и сущность дисконтирования. Учетная ставка. Процентные ставки в условиях инфляции. Производные процентные расчеты и кривые доходности. Принцип финансовой эквивалентности платежей и его применение при изменении условий контракта.

1.2. Денежные потоки. Приведенная стоимость потока. Расчет чистой приведенной стоимости. Регулярные потоки платежей. Ренты. Определение параметров финансовых рент. Объединение и замена потоков платежей.

1.3. Инвестиционные проекты. Числовые показатели эффективности инвестиционных проектов.

Раздел 2. Облигации

2.1. Математическая модель облигации. Основные характеристики облигации. Кривая доходности.

2.2. Дюрация потока платежей. Дюрация облигации. Дюрация Маклея и модифицированная дюрация. Дюрация портфеля облигаций. Свойства дюрации. Выпуклость облигации. Хеджирование риска изменения процентной ставки. Теорема об иммунизации. Управление портфелем облигаций.

Раздел 3. Портфельный анализ

3.1. Основные понятия. Доходность и риск. Постановка задачи построения оптимального портфеля. Множество допустимых портфелей. Эффективная граница. Портфель из двух ценных бумаг. Формирование и управление портфелем облигаций.

3.2. Модель Марковица. Оптимальный портфель при наличии безрисковой ценной бумаги. Касательный портфель. Теорема о разделении. Построение оптимального портфеля с ограничениями. Оптимальный портфель при запрещенных коротких позициях.

3.3. Факторные модели. Однофакторная модель доходности. Многофакторные модели. Рыночная модель и диверсификация. Модель оценки финансовых активов (САРМ). Системный и несистемный риски. Эффективность инвестиционного портфеля. Коэффициент Шарпа. Коэффициент

Трейнора. Коэффициент Йенсена. Арбитражная теория ценообразования и факторные модели.

Раздел 4. Производные финансовые инструменты

4.1. Основные сведения о фьючерсах и опционах. Производные инструменты и хеджирование рисков. Торговые стратегии, основанные на опционах. Паритет цен европейских опционов покупателя и продавца.

4.2. Стохастические модели финансовых рынков. Дискретные и непрерывные модели. Концепция эффективного рынка. Общее представление о мартингалах.

4.3. Понятие арбитража. Теорема об арбитраже на рынке с дискретным временем. Нейтральные к риску вероятности.

4.4. Биномиальная модель ценообразования. Однопериодная модель. Многопериодная биномиальная модель. Оценка опционов в рамках биномиальной модели. Биномиальная модель эволюции процентной ставки. Оценка стоимости опционов на облигации.

4.5. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Предельный переход в модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Модель ценообразования опционов Блэка-Шоулза-Мертон. Коэффициенты хеджирования («греки») в модели Блэка-Шоулза-Мертон. Моделирование ценовой траектории акций методом Монте-Карло. Установление цены европейского колл-опциона посредством оценки методом Монте-Карло и аппроксимирующей репликации.

Раздел 5. Выбор и принятие решений в условиях неопределенности

5.1. Отношения предпочтения, функции полезности, функции выбора. Связь между отношениями предпочтения и функциями полезности. Виды функций полезности. Выбор в условиях неопределенности. Ожидаемая полезность. Концепция неприятия риска. Меры риска. Аксиоматический подход. Сумма под риском. Усредненная сумма под риском. Оценка риска экстремальных событий.

5.2. Индивидуальный выбор при неопределенности и риске: обзор теорий и экспериментальных результатов. Теория ожидаемой полезности Неймана–Моргенштерна. Парадоксы выбора. Критика ожидаемой полезности.

5.2. Учебно – тематический план

№ п/п	Наименование (тем) разделов дисциплины	Трудоемкость в часах					Формы текущего контроля успеваемости
		Всего	Контактная работа – Аудиторная работа*			Самосто- ятельная работа	
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, практиче- ские занятия		
1.	Основы класси- ческой финансо- вой математики	21	9	3	6	12	Самостоятельная работа. Участие в решении задач на практических занятиях. Собе- седования по до- машним зада- ниям.
2.	Облигации	30	9	3	6	21	Самостоятельная работа. Участие в решении задач на практических занятиях. Собе- седования по до- машним зада- ниям.

3.	Портфельный анализ	37	14	4	10	23	Самостоятельная работа. Участие в решении задач на практических занятиях. Собеседования по домашним заданиям.
4.	Производные финансовые инструменты	28	12	4	8	16	Самостоятельная работа. Участие в решении задач на практических занятиях. Собеседования по домашним заданиям.
5.	Выбор и принятие решений в условиях неопределенности	28	6	2	4	22	Самостоятельная работа. Участие в решении задач на практических занятиях. Собеседования по домашним заданиям.
	В целом по дисциплине	144	50	16	34	94	Согласно учебному плану: контрольная работа
	Итого в %		35	32	68	65	

* объем контактной работы в очно-заочной/заочной формах обучения и индивидуальных учебных планах определяется соответствующими учебными планами. Темы, реализуемые в виде контактной работы, определяются преподавателем самостоятельно, исходя из уровня их сложности.

5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8,9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
Основы классической финансовой математики	Простые и сложные проценты: типы процентных ставок, эффективная процентная ставка, учетная ставка, процентные ставки в условиях инфляции. Процессы изменения денег во времени. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [10,12]. Денежные потоки: Приведенная стоимость потока, аксиоматический подход к оценке стоимости потоков платежей, регулярные потоки платежей, ренты, объединение и замена потоков платежей.	Интерактив – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений – до 50% от трудоемкости практического занятия

	<i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [12] Инвестиционные проекты: числовые показатели эффективности инвестиционных проектов. Чистый приведенный доход. Внутренняя норма доходности. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [12]	
Облигации	Облигации: математическая модель облигации. Основные характеристики облигации. Кривая доходности. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [2-4], 9, [11,12] Хеджирование риска изменения процентной ставки: дюрация потока платежей, дюрация облигации, дюрация портфеля облигаций, выпуклость облигации, теорема об иммунизации, управление портфелем облигаций. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4]	Интерактив – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений – до 50% от трудоемкости практического занятия.
Портфельный анализ	Оптимальный портфель рискованных активов: доходность и риск, портфель из двух ценных бумаг, множество допустимых портфелей, построение оптимального портфеля. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [12] Модель Марковица: построение оптимального портфеля при наличии безрисковой ценной бумаги. Нахождение касательного портфеля. Принятие решений в зависимости от отношения к риску. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [12] Построение оптимального портфеля с ограничениями: нахождение угловых точек, построение оптимального портфеля при запрещенных коротких позициях. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [12] Факторные модели: вычисление коэффициентов альфа и бета портфеля. Использование коэффициента Шарпа для принятия решений об изменении состава портфеля. Многофакторные модели. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [12]	Интерактив – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений – до 50% от трудоемкости практического занятия.
Производные финансовые инструменты	Паритет цен европейских опционов покупателя и продавца, оценка границ стоимости производных инструментов, построение арбитражных стратегий при нарушении паритета цен. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [7-9,12] Дискретные модели финансовых рынков: многопериодные модели, вычисление вероятности попадания цены рискованного актива в заданный промежуток для биномиальных и триномиальных моделей, мартингалы в дискретных моделях, понятие арбитража, нахождение нейтральных к риску вероятностей в дискретных моделях, вычисление цены производного инструмента на полном рынке. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [7-9,12]	Интерактив – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений – до 50% от трудоемкости практического занятия.

	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна: биномиальная модель ценообразования, многопериодная модель, оценка опционов в рамках биномиальной модели, вычисление безарбитражной цены опционов на активы с дивидендной доходностью, валютных опционов и фьючерсных опционов, в т. ч. американских опционов. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [7-9,12] Модель Блэка-Шоулза -Мертон: предельный переход в модели Кокса-Росса-Рубинштейна, формула Блэка-Шоулза -Мертон, коэффициенты хеджирования («греки») в модели Блэка-Шоулза -Мертон. <i>Рекомендуемые источники:</i> 8, [1-4], 9, [4,7-9] Модели эволюции процентной ставки: моделирование динамики процентной ставки, биномиальная модель, оценка стоимости опционов на облигации. <i>Рекомендуемые источники:</i> 9, [7-9]	
Выбор и принятие решений в условиях неопределенности	Отношения предпочтения и функции полезности: анализ свойств функций полезности и отношений предпочтения. Оценка ожидаемой полезности. Выбор в условиях неопределенности. Применение ожидаемой полезности в задачах страхования и хеджирования рисков. <i>Рекомендуемые источники:</i> 9, [1,3,8-9] Отношения к риску: вычисление коэффициентов, выражающих отношение экономического агента к риску. Анализ свойств стохастического доминирования. Неприятие риска в задачах портфельного анализа. <i>Рекомендуемые источники:</i> 9, [1,3,8-9] Меры риска: анализ аксиом количественной оценки риска. Разбор примеров. Вычисление суммы под риском на примерах. Разбор примеров, показывающих недостатки показателя «сумма под риском». Вычисление усредненной суммы под риском и изучение свойств этого показателя. Применение на примерах методов оценки риска экстремальных событий. Изучение свойств распределения Парето. <i>Рекомендуемые источники:</i> 9, [1,3,8-9,12] Индивидуальный выбор при неопределенности и риске: теории субъективной ожидаемой полезности Сэвиджа, Энскомба и Ауманна. Теория ожидаемой полезности Неймана–Моргенштерна. Парадоксы выбора. <i>Рекомендуемые источник:</i> 9, [1,3,8-9,12]	Интерактив – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений – до 50% от трудоемкости практического занятия.

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Основы классической финансовой математики	Схемы погашения кредита Инфляция и ее влияние на показатели эффективности инвестиционных проектов Производные процентные расчеты и кривые доходности	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Облигации	Методы определения временной структуры процентных ставок	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
Портфельный анализ	Методы построения оптимальных портфелей Построение графика минимальной границы Генерирование портфеля ценных бумаг на языке Python (библиотека PyPortfolioOpt) Получение данных по акциям из среды интернет Построение графика эффективных границ	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Работа с источниками и поиск информации в Интернете. Выполнение домашних заданий.
Производные финансовые инструменты	Непрерывные случайные процессы Численные методы для вычисления цены производных инструментов Производные инструменты и хеджирование рисков: применение фьючерсов для хеджирования рисков, применение опционов для хеджирования рисков, построение торговых стратегий (бычий спрэд, медвежий спрэд, спрэд типа бабочка) Частотное распределение смоделированной внутренней стоимости акции при наступлении срока погашения европейского пут-опциона Модели эволюции процентной ставки: моделирование динамики процентной ставки, модель Васичека, модель Хо-Ли, модель Халла-Уайта, биномиальная модель, оценка стоимости опционов на облигации	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.

Выбор и принятие решений в условиях неопределенности	Теория ожидаемой полезности и ее критика Применение на примерах методов оценки риска экстремальных событий. Изучение свойств распределения Парето.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий.
--	---	--

6.2. *Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю*

Примерные задачи практических занятий

1. С помощью информационной интернет-площадки Финам, Bloomberg (или других ресурсов) получить таблицу значений цен закрытия за 30 дней о трех компаниях, входящих в индекс голубых фишек индекса РТС.
2. Вычислить ожидаемую доходность и волатильность выбранных активов.
3. Получить значения индекса РТС за тот же период и использовать полученные сведения при расчете рыночного портфеля.
4. Построить эффективную границу.
5. Построить эффективную границу при условии запрета коротких продаж.
6. Рассчитать коэффициенты альфа и бета (в качестве безрисковой ставки взять ставку по инструментам фиксированной доходности).
7. Написать уравнения: линия рынка капитала CML, SML.
8. Годовая процентная ставка составляет 12%. Проценты начисляются 6 раз в год. Найти эффективную процентную ставку. Также найти эффективную процентную ставку в случае непрерывного начисления процентов.
9. Темп инфляции за период в $N=6$ месяцев равен 3%. Найти среднемесячный и годовой темп инфляции.
10. Ставка дисконтирования равна 8%. Рассматривается денежный поток $CF=\{(0,-100);(1,140);(2,65)\}$. а) Найти чистую приведенную стоимость

(NPV) данного денежного потока б) Найти внутреннюю норму доходности (IRR) данного потока в) Оценить эффективность проекта.

11. Инвестор обладает двумя активами А и В с доходностями $r_A = 0.15$ и $r_B = 0.4$ и рисками $\sigma_A = 0.04$, $\sigma_B = 0.08$. Коэффициент корреляции активов равен 0.8. Функция полезности инвестора $U(r) = r - 10\sigma^2$
- а) Найти портфель с заданной доходностью 0.15, не принимая во внимание полезность. б) Найти портфель, максимизирующий полезность. в) Найти портфель минимального риска.
12. Имеется два актива с характеристиками $r_A = 0.11$, $\sigma_A = 0.05$ и $r_B = 0.3$, $\sigma_B = 0.4$, коэффициент корреляции между которыми $\rho = -0.1$. На рынке имеется также безрисковый актив с доходностью $r_f = 0.03$. а) Найти касательный портфель. б) Найти портфель минимального риска при фиксированной доходности 0.18.
13. Акции компании имеют бета-коэффициент 1. Безрисковая ставка равна $r_f = 3\%$, а доходность рыночного портфеля $r_M = 16\%$. Найти: а) ожидаемую доходность акции данной компании. б) Риск-премию рыночного портфеля. в) Обосновать решение, которое целесообразно принять, если наблюдаемая доходность данной акции равна 20%.
14. Даны ценные бумаги трёх видов с ожидаемыми доходностями $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 19$, $\mu_3 = 15$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид $V = \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 50 \end{pmatrix}$. Найти уравнение минимальной границы при условии, что безрисковая ставка равна 11. Определить координаты касательного портфеля.

15. Вниманием инвестора привлекает акция, продающаяся сейчас по 50\$. Европейский колл-опцион на данную акцию продается за 2\$. Цена исполнения опциона равна $K=49$ \$. Опцион выписан на $T=0.2$ лет. Безрисковая ставка равна $r=40\%$. а) Найти нижнюю границы цены данного опциона. Если есть арбитражная возможность, описать арбитражную стратегию.
16. Акция продается сейчас за 20\$. Через 0.4 года) цена акции может принять два значения, 23\$ или 19\$. Цена исполнения соответствующего колл-опциона равна 21\$. Безрисковая ставка равна 9%. а) Вычислить риск-нейтральную вероятность для движения цены актива вверх. б) Найти число акций в безрисковом портфеле, состоящем из купленных акций и одного опциона. в) Найти цену данного опциона на текущий момент времени.
17. Цена исполнения полугодового американского опциона на продажу евро равна 62 руб. Вычислить стоимость опциона, используя трехпериодное биномиальное дерево и четырехпериодное биномиальное дерево. Данные для расчета: текущий курс евро — 60 руб., безрисковая процентная ставка в зоне евро — 2%; безрисковая рублевая процентная ставка — 10% годовых; волатильность евро — 20% в год.
18. Найти стоимость годового американского опциона на покупку британского фунта за доллары по цене 1,6 доллара за фунт. Параметры: текущий валютный курс 1,61; волатильность курса 12%; цена исполнения 300; безрисковая ставка по доллару 8%; безрисковая ставка по фунту 9%; волатильность индекса 30%.
19. На рынке облигаций доходности на ближайшие один, два и три года одинаковы и равны 9 %. Волатильность процентной ставки равна 10 %. Построить двухпериодную биномиальную модель процентной ставки.

20.а) Построить четырехпериодную биномиальную модель эволюции процентной ставки (один период — полгода), если рыночные стоимости бескупонных облигаций представлены следующей таблицей:

Срок до погашения (в гг.)	0,5	1	1,5	2
Стоимость облигации с номиналом 100	96	94	92	90

Годовая волатильность процентной ставки составляет 10%.

б) Рассчитать стоимость опциона покупателя с ценой исполнения 92 и сроком исполнения 1,5 года. в) Рассчитать стоимость аналогичного опциона продавца.

15. Цена $S(t)$ некоторого актива в текущий момент времени t равна 115 долл., а его волатильность $\sigma = 20\%$ годовых. В рамках однопериодной биномиальной модели вычислите текущую цену $C(t)$ шестимесячного колл-опциона с ценой исполнения $K = 125$ долл. Процентная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 9% годовых.

16. Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна, а элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег). Лотерея 6 и 10 с вероятностями $1/3$ и $2/3$ и лотерея 3 и 9 с вероятностями $2/3$ и $1/3$ для него эквивалентны. Что можно сказать о склонности данного индивида к риску?

17. Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности от богатства $u(x)$, причем u имеет положительную убывающую производную. Он владеет богатством 250 000 и может потерять в случае наступления события А 50 000. Вероятность события А равна 0,03 и известно, что он застраховался на сумму 100 000. Возможно ли, что цена страхования на 1 равна 0,03? Если нет, то больше или меньше, чем 0,02? Объясните.

18. Пусть $u(x) = \ln(1 + x)$, а F задает равномерное распределение на отрезке $[9, 19]$. Рассчитать степень неприятия риска ЛПР.

19. Пусть функция Бернулли есть $u(x) = \sqrt{x}$, выигрыши лотереи равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти среднюю ожидаемая полезность лотереи.

20. Пусть текущая цена акции 1320 руб. Каждый год она может или подняться на 21% или упасть на 17%. По акции не выплачиваются дивиденды и годовой безрисковый процент – 7%. Цена исполнения европейского опциона колл – 1350 руб., опцион истекает через два года. Найдите текущую цену опциона.

21. Текущая цена акции 1320 руб., стандартное отклонение доходности 14% по акции не выплачиваются дивиденды. Найдите цену европейского опциона колл на эту акцию, если цена его исполнения 1350 руб., время до истечения 2 месяца, а безрисковая непрерывно начисляемая процентная ставка 7%.

22. Цена $S(t)$ некоторого актива в текущий момент времени t равна 1500 долл., а его волатильность $\sigma = 20\%$ годовых. В рамках однопериодной биномиальной модели вычислите текущую цену $C(t)$ четырехмесячного колл-опциона с ценой исполнения $K = 1400$ долл. Процентная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 7% годовых.

Примерная тематика контрольной работы

- Рентные вычисления.
- Погашение долгосрочной задолженности.
- Числовые характеристики облигаций.
- Формирование фондов и пенсионная задача.
- Построение оптимального портфеля ценных бумаг.
- Биномиальная модель ценообразования.
- Формула Блэка-Шоулза-Мертон.

Примерные задания контрольной работы

1. Здание стоимостью 100 млн.\$ можно приобрести либо разовым платежом, либо в рассрочку на 10 лет с равными выплатами в конце каждого месяца. На остаток задолженности при покупке в рассрочку начисляется 8,5% годовых. Чему равны погасительные платежи?
2. Решено в течение 10 лет создать фонд в сумме 1 млн.\$. На денежные средства, поступающие в фонд в конце каждого года, начисляется 8,75% годовых. Первый взнос в фонд составляет 80 тыс.\$. Определите значение прироста платежей.
3. Определите, что для инвестора выгоднее? Купить по курсу 90 облигацию номиналом в 1000 у.е. в момент выплаты купонных полугодовых платежей по годовой ставке 6,5% за 3,5 года до ее погашения или за ту же сумму купить вексель на 1100 у.е. с оплатой через 2 года.
4. Построить портфель из двухгодичной и десятигодичной облигаций, иммунизирующий пятигодичную облигацию номинальной стоимостью 1000 для процентной ставки 10%.

5. Сформировать портфель Тобина эффективности 8 и минимального риска из трёх видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 3 и коррелированных рисковом ожидаемой эффективностью 11 и 12, рисками 2 и 4 с ковариацией $V_{12} = 2$.

6. Пусть текущая цена акции 1320 руб. В первый год цена может подняться до 1663,2 руб. с вероятностью 0,474. По акции не выплачиваются дивиденды и годовой безрисковый процент – 6%. Цена исполнения европейского опциона колл – 1350 руб., опцион истекает через два года. Найдите вероятность понижения цены, понижающий коэффициент и текущую цену опциона в рамках многопериодной биномиальной модели.

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения Факультета информационных технологий и анализа больших данных.

Обучающийся освобождается от выполнения проверочной работы по темам «Основы финансовых вычислений» и «Облигация» при наличии сертификата о прохождении темы на онлайн платформе из п. 9. "Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины".

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
УК-12 Способность использовать базовые дефектологические знания в социальной и профессиональной сферах	1. Находит пути взаимодействия в социальной и профессиональной сферах с лицами с ограниченными возможностями здоровья и инвалидами.	Знать особенности применения базовых дефектологических знаний в социальной и профессиональной сферах; принципы взаимодействия при коммуникации в различных сферах жизнедеятельности, с учетом социально-психологических особенностей лиц с ограниченными возможностями здоровья; алгоритмы решения профессиональной задачи в социальной сфере и профессиональной сфере Уметь планировать профессиональную деятельность с лицами, имеющими инвалидность или ограниченные возможности здоровья; использовать инструментарий базовых дефектологических знаний для решения профессиональных задач	По полученному от преподавателя файлу, содержащему информацию о данных потребительских корзинах различных групп пользователей за определенный период времени определить группы здоровья (ограничение жизнедеятельности по зрению, по слуху, по заболеваниям опорно-двигательного аппарата, без ограничений) и корректно разместить пользователей по этим группам, используя пакет офисных программ. Используя пакет офисных программ определить наилучшие альтернативы для потребителей с проблемами опорно-двигательного аппарата согласно данным, содержащим цены, отзывы, рейтинг, географическую область доставки (область проживания) и историю покупок.

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Временная и денежные шкалы.
2. Процент. Процентная ставка. Простые и сложные проценты.
3. Эквивалентность ставок в схеме сложных процентов.
4. Дисконт. Учетная ставка. Краткосрочные долговые обязательства.

5. Учет инфляции в оценивании простых кредитных сделок. Реальная и номинальная ставки сделки.
6. Денежные потоки и их числовые характеристики.
7. Финансовые потоки в схеме простых процентов.
8. Регулярные потоки и внутренняя норма доходности.
9. Дюрация потока платежей и ее свойства.
10. Будущая и текущая стоимости денежных сумм в схеме сложных процентов.
11. Планирование погашения долгосрочной задолженности.
12. Стандартные ренты. р-срочные ренты.
13. Финансовые операции с ценными бумагами.
14. Инвестирование и инвестиционные активы.
15. Облигации. Доходность облигаций.
16. Свойства облигаций. Дюрация и выпуклость.
17. Основные параметры облигации. Связь рыночной цены и доходности.
18. Иммунизация портфеля облигаций.
19. Основные понятия портфельного анализа. Оптимальный портфель.
20. Оптимальный портфель при наличии безрисковой компоненты.
21. Линия рынка капитала. Рыночный портфель.
22. Однофакторная модель доходности. Коэффициенты α и β .
23. Модель CAPM.
24. Производные инструменты. Платежные функции производных инструментов европейского типа.
25. Паритет цен европейских опционов.
26. Торговые стратегии с использованием опционов.
27. Теорема о совпадении цен европейских и американских опционов покупателя на активы, не приносящие доходов.
28. Сильный арбитраж. Теорема безарбитражности (без доказательства).
29. Риск-нейтральная вероятность.

30. Риск-нейтральное ценообразование.
31. Биномиальная модель. Условие безарбитражности биномиальной модели.
32. Риск-нейтральная вероятность биномиальной модели.
33. Многопериодная биномиальная модель.
34. Безарбитражная цена производного инструмента в биномиальной модели.
35. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.
36. Стохастические модели финансового рынка.
37. Рациональный прогноз как мартингал.
38. Мартингальность дисконтированной цены относительно риск нейтральной вероятности.
39. Инвестиционные стратегии. Самофинансируемые портфели. Определение цены платежного обязательства.
40. Геометрическое броуновское движение.
41. Модель Блэка-Шоулза-Мертон. Мартингальная вероятность в модели Блэка-Шоулза-Мертон.
42. Уравнение Блэка-Шоулза-Мертон.
43. Формула Блэка-Шоулза-Мертон.
44. Чувствительность цены опциона европейского типа к изменению параметров модели Блэка-Шоулза-Мертон.
45. Хеджирующий портфель в модели Блэка-Шоулза-Мертон.
46. Функции полезности. Ожидаемая полезность.
47. Максимизация ожидаемой полезности в биномиальной модели с логарифмической полезностью.

Пример экзаменационного билета
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №

Вопрос 1. (5 баллов) При условии ежегодного начисления дохода по схеме сложных процентов сумма вклада за пятый год увеличилась на 320 руб., а за седьмой год – на 500 руб. На сколько рублей увеличится вклад за восьмой год?

Вопрос 2. (5 баллов) Найти дюрацию потока платежей $\{(2500; 1), (4500; 2), (2900; 3), (3200; 4)\}$ при процентной ставке $i = 9\%$.

Вопрос 3. (15 баллов) Сформировать портфель Тобина эффективности 8 и минимального риска из трёх видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 3 и коррелированных рискововых ожидаемой эффективностью 11 и 12, рисками 2 и 4 с ковариацией $V_{12} = 2$.

Вопрос 4. (10 баллов) На идеальном финансовом рынке 17% по стоимости составляют безрисковые бумаги и 83% – рисковые. Рисковых всего три: первые составляют $1/8$ их общей стоимости и их $\beta = 0,8$; вторые – $3/8$ и $\beta = 1,1$. Каковы эффективности и β всех рискововых бумаг, средняя доходность и коэффициент β по всему рынку, если средняя доходность по рисковым бумагам равна 12%, а безрисковая ставка равна 9%?

Вопрос 5. (15 баллов) Пусть текущая цена акции 1320 руб. Каждый год она может или подняться на 21% или упасть на 17%. По акции не выплачиваются дивиденды и годовой безрисковый процент – 7%. Цена исполнения европейского опциона колл – 1350 руб., опцион истекает через два года. Найдите текущую цену опциона.

Вопрос 6. (10 баллов) Пусть функция Бернулли есть $u(x) = \sqrt{x}$, выигрыши лотереи равномерно распределены на отрезке $[0, 3]$. Найти среднюю ожидаемую полезность лотереи.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Гисин, В. Б. Математические основы финансовой экономики: учебное пособие для самостоятельной работы студентов, обуч. по направлени. "Прикладная математика и информатика", программа подгот. бакалавра; по направлени. "Экономика", программа подгот. бакалавра; по направлени. "Финансы и кредит", программа подгот. магистра / В. Б. Гисин, А. С. Диденко, Б. А. Путко; Финуниверситет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. – Москва : Прометей, 2018. – 170 с. – Текст : непосредственный. – То же. – ЭБС Университетская библиотека online. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=494872> (дата обращения: 15.11.2023). – Текст : электронный.

2. Бабайцев, В. А. Математические методы финансового анализа : учебное пособие для вузов / В. А. Бабайцев, В. Б. Гисин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2023. — 215 с. — (Высшее образование). - ЭБС Юрайт. — URL: <https://urait.ru/bcode/516100> (дата обращения: 15.11.2023). — Текст : электронный.

б) дополнительная литература:

3. Аль-Натор, М. С. Основы финансовых вычислений (факты, формулы, примеры, задачи и тесты). Ч. 1: учебное пособие / М. С. Аль-Натор, Ю. Ф. Касимов, А. Н. Колесников; Финуниверситет, Каф. "Прикладная математика". — Москва : Финуниверситет, 2012. – 159 с. — Текст : непосредственный.

4. Аль-Натор, М. С. Основы финансовых вычислений (факты, формулы, примеры, задачи и тесты). Ч. 2: учебное пособие / М. С. Аль-Натор, Ю. Ф. Касимов, А. Н. Колесников; Финуниверситет, Каф. прикладной математики. — Москва : Финуниверситет, 2013. – 176 с. — Текст : непосредственный.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации <http://portal.ufrf.ru/>
2. Сайт департамента анализа данных и машинного обучения.
3. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/> (<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)
4. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
5. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» <https://e.lanbook.com/>
6. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>
7. Научная электронная библиотека [eLibrary.ru](http://elibrary.ru) <http://elibrary.ru>
8. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://urait.ru>
9. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>
10. Массовый открытый онлайн-курс «Introduction to Time Value of Money (TVM)» специализации «Foundational Finance for Strategic Decision Making»// University of Michigan – <https://www.coursera.org/learn/time-value-of-money?specialization=foundational-finance#modules>.
11. Открытый онлайн-курс «Облигации и акции. Их оценка. Базовый курс» <https://stepik.org/course/116616/info>
12. Базовый электронный учебный курс по дисциплине «Финансовая математика» – <https://campus.fa.ru/course/view.php?id=22445>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Раздел содержит комплекс рекомендаций и разъяснений, позволяющих обучающемуся оптимальным образом организовать процесс самостоятельного изучения как теоретического учебного материала, так и подготовки к практическим и семинарским занятиям, в том числе проводимым с использованием активных и интерактивных технологий обучения.

По всем разделам дисциплины предусмотрена цепочка учебных работ: лекция – семинары – самостоятельная работа студентов (в разделе Материалы для самоподготовки, размещенных на странице курса на учебном портале <https://campus.fa.ru/> обучающийся найдет тесты по основным разделам дисциплины). По итогам изучения осуществляется аттестация студента в форме письменного контроля знаний (экзамена).

Самостоятельная работа студентов в большей мере проходит внеаудиторно. Организации самостоятельной работы служит календарно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций, практических занятий, вопросы и задания для самостоятельного изучения. На портале <https://campus.fa.ru/> своевременно выкладываются материалы для самостоятельного разбора и задачи для самоконтроля.

При подготовке к лекции рекомендовано ознакомиться с тематическим планом, в соответствии с рабочей программой дисциплины, и по рекомендованным пособиям выделить наиболее трудные вопросы. Работа с лекционным материалом предполагает конспектирование основного содержания лекции и разбор материала к семинарским занятиям.

Данная дисциплина адаптирована для студентов с ограниченными возможностями здоровья, а также курс состоит из онлайн-части, предоставленной coursera.org (Introduction to Time Value of Money (TVM)) и stepik.org (Облигации и акции. Их оценка. Базовый курс) и автономная часть, описанная

РПД. Студенты должны изучить онлайн-часть самостоятельно, используя материалы, доступные на сайтах coursera.org и stepik.org. Содержание дисциплины не ограничивается тематикой онлайн-части и делает особый акцент на актуальных вопросах прикладных направлений, которые могут быть сложными для самостоятельного изучения. Студенты также могут пользоваться материалами базового учебного курса, размещенными на учебном портале campus.fa.ru.

Методические указания по проведению практических занятий

По структуре практические занятия следует разделить на учебные и контрольные.

● **Учебные практические занятия** структурно состоят из следующих компонент:

1) проверка наличия выполненного задания самостоятельной работы каждого студента;

2) проверка корректности выполнения домашнего задания;

3) разбор типичных ошибок, возникших в самостоятельной работе;

4) рассмотрение теоретических вопросов, связанных с текущим практическим занятием;

5) разбор методов выполнения практических заданий и решения задач;

6) корректировка заданий для самостоятельной работы студентов;

7) интерактивная форма – Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) – представляет собой решение списка задач, определенных преподавателем, в группе из небольшого количества студентов. Студенты самостоятельно организуют группы. Работа группы оценивается по количеству правильно решенных задач.

● **Контрольные практические занятия** структурно состоят из следующих компонент:

- 1) проверка наличия контрольной работы каждого студента;
- 2) разбор типичных ошибок, возникших при выполнении контрольной работы;
- 3) проведение аудиторной контрольной работы.

При подготовке к практическому занятию рекомендуется повторить или, если это требуется, изучить соответствующий теоретический материал. Во время занятия нужно точно записывать формулировки решаемых задач, вопросы, указания преподавателя к решению и разбираемые решения. В случае затруднений обратиться к преподавателю для назначения консультации. Практические занятия проходят, как правило, в интерактивной форме и преподаватель учитывает активность студентов, направленную на решение предложенных задач, и в поиске ответов на вопросы.

Домашние задания следует выполнять регулярно при подготовке к практическим занятиям. В большинстве своем задания являются типовыми, и образцы их решения содержатся в рекомендованных пособиях, в материале лекций и практических занятий. Если то или иное задание вызвало затруднение необходимо обратиться к преподавателю на консультации или ближайшем практическом занятии. Регулярность в выполнении домашних заданий — важный фактор освоения дисциплины. Контроль за выполнением домашних заданий осуществляется в ходе практических занятий и выборочного собеседования.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Пакет офисных программ
2. Антивирус Kaspersky

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Информационно-правовая система «Гарант»
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» -

<http://www.skrin.ru/>

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации: – не предусмотрены

12.4. Среда программирования *R*

12.5. Среда программирования *Wolfram Mathematica*

12.6. Веб-приложение с открытым исходным кодом — *Jupyter notebook*

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Требуется доступ в компьютерный класс для выполнения заданий для самостоятельной работы.